Subvariedades de Matrices y una estratificación de las Matrices Normales.

Adrian Ricardo Gómez Plata*
Universidad Militar NuevaGranada

Noviembre del 2005
Bogotá (Colombia)

Abstract

I present two examples of matrices submanifold and the sets normal matrices as a connected star-shape stratified submanifold of $\Re^{2n^2}$.

Key words: star-shapes, stratified submanifold,normal matrix.

1 Introducción

Marko Huhtanen en [0] costruye una estratificación de las matrices normales obtenido del estrato de dimensión maximal $n^2 + n$ usando la descomposición Toeplitz y que permite resolver problemas computacionales que conllevan el cálculo matrices normales; por ejemplo la aproximacón de valores propios. En esta ponencia se presentará los requerimientos matemáticos para entender un teorema de estratificación de matrices normales que Huhtanen ya presenta en [0] y que es el primer paso para comprender la estratificacin que el construye para resolver dichos problemas computacionales,tambien se mostrará dos subvariedades del conjunto de Matrices $M_{n\times n}$.

*Investigador del grupo Matrix Universidad Militar Nueva Granada. mail:adriangomez1975@yahoo.com

2 Variedades

Se daran algunas definiciones utiles de variedades para mostrar dos subvariedades de matrices.

2.1 Subvariedades

Sea M un espacio topológico de Hausdorff separable. Si $U \subset M$ y $V \subseteq \Re^n$ son subconjuntos abiertos, un homeomorfismo

$$f : U \longrightarrow V$$

es llamado una $n - carta$ para U.

Si $\Omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de M y $F = \{f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha\}$ es una colección de $n - cartas$, entonces F es llamado un *atlas* para M si dado que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo.

Un *atlas* es denotado por (M, Ω, F) y se refiere a una *variedad suave de dimensión n.*

Un ejemplo sencillo de variedad lo proporciona el mismo espacio de $\Re^n$, ya que para todo $x \in \Re^n$ se puede tomar U como $\Re^n$. Obviamente $\Re^n$ es homeomorfico a el mismo. Un subconjunto M de $\Re^2$ formado por las rectas $y = x$ e $y = -x$ no es una variedad ya que no es posible establecer un homeomorfismo entre $V_{(0,0)} \bigcap M$ y $V((0,0))$.

Sea (M, Ω, F) una variedad de dimensión n. Un subconjunto $P \subseteq M$ es una subvariedad de dimensión k si para todo $p \in N$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ de p y una $n - carta$ $f : U \longrightarrow V$ tal que

$$p \in f^{-1}(V \cap \Re^k) = N \cap U.$$

[1] propone el siguiente ejercicio. El subconjunto

$$M = \{(A, b) \in M_n(\Re) \times \Re : b\, detA = 1\} \subseteq M_n(\Re) \times \Re$$

es una subvariedad cerrada de $M_n(\Re) \times \Re$. Para demostrarlo definamos la siguiente función

$$F : M_n(\Re) \times \Re \to \Re \ ; \ F(A,b) = b\, detA - 1.$$

Esta es función es suave y $M = F^{-1}0 \subset M_n(\Re)$ es un subconjunto cerrado. La derivada del mapeo $d = d_{(A,b)}$ en un punto $(A,b) \in\ F^{-1}0$ tiene la forma

$$d(X,v) = (detA)v + d\, det_A(X)$$

donde la identificación natural de $T_{(A,b)}M_n(\Re) \times (\Re) = M_n(\Re) \times (\Re)$ y $\mathrm{T}_t(\Re) = (\Re)$, para todo $t \in \Re$. El $detA \neq 0$ es sobreyectivo. Aqui $M \subseteq \Re \times \Re$ es una subvariedad suave de dimensión igual a la $dim\, M_n(\Re) = n^2$.

Otro ejemplo se encuentra en el conjunto de matrices normales . Una matriz $N \subset M_n$ se dice que es normal (N_n) si $NN^* = N^*N$. Ahora una matriz diagonal $D \in D_n$ se dice que es similar unitariamente a una matriz $N \in N_n$ si existe una matriz unitaria $U \in M_n$ tal que

$$D = U^*NU.$$

de donde se tiene $UDU^* = UU^*NUU^*$ es decir que el conjunto de matrices normales se puede ver como

$$N = UDU^*$$

Esto sugiere que el conjunto de matrices normales N_n sea pueda obtener por medio de la siguiente función

$$\begin{aligned} F : M_n \times M_n &\longrightarrow N_n \\ (U,D) &\mapsto UDU^* \end{aligned}$$

Esta función es suave y $G = (F^{-1})(UDU^*) \subset M_n \times M_n$ es tal que $N \subset M_n \times M_n \subseteq \Re^{2n^2}$ ya que conjuntos compactos tienen preimagenes compactas.

2.2 Forma de estrella de las matrices normales

Se definirá las variedades en forma de estrella y se mostrará que las matrices normales tienen forma de estrella.

Una variedad M es llamada contraible a un punto $p_0 \in M$ si existe una función

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow M$$

tal que

$$H(p,1) = p,\ H(p,0) = p_0 \text{ para } p \in M$$

Mas generalmente, $U \in \Re^{2n^2}$ es contraible a un un punto $p_0 \in U$ si U tiene la propiedad de que si $p \in U$ esto implica que $p_0 + t(p - p_0) \in U$ para $0 \leq t \leq 1$. Tal region se le dice que tiene forma de estrella con respecto de p_0.

Por ejemplo N_n es contraible a la matriz *cero*. Para ver esto definamos lo siguiente

$$H : M_n \times [0,1] \longrightarrow M_n$$

Definiendo

$$H(p,t) = tN, \text{ para } N \in N_n$$

podemos ver que $H(N,1) = N$, $H(N,0) = 0$. Esto implica que N_n tiene forma de estrella.

3 Espacios estratificados

Se definirá que es un espacio estratificado y se mostrará el conjunto de matrices normales como una subvariedad estratificada.

3.1 Estratificación de las Matrices Normales

Sea W un espacio topólogico de Hausdorff localmente compacto con bases contables. Una estratificación en W es una partición $\sum$ de W de conjuntos cerrados localmente tal que :

i) Todo $X \in \sum$ es una variedad de dimensión finita con frontera.
ii) $\sum$ es finita localmente.
iii) Si $X, Y \in \sum$ y $X \bigcap \widetilde{Y} \neq \emptyset$ entonces $X \subseteq \widetilde{Y}$.
iv) Si $X, Y \in \sum$ y $X \subseteq \widetilde{Y}$ con $X \neq Y$ entonces $dimX < dimY$

Los conjuntos de la partición de los elementos de $\sum$ son llamados el estrato. El par $(W, \sum)$ es llamado un espacio estratificado. Algunos ejemplos importantes que admiten estratificación son:

1. Variedades con frontera donde $\sum = \{Int(M), \partial M\}$.En particular se puede mencionar las matrices cuadradas M_n.
2. Variedades algebraicas y espacios analíticos en $\Re$ o C.
3. Conjuntos analíticos y subanalíticos. En particular las matrices normales N son un conjunto subanalitico de las matrices M_n ya que si se toma el conjunto imagen de la función

$$\begin{aligned} F : M_n \times M_n &\longrightarrow N_n \\ (U, D) &\mapsto UDU^* \end{aligned}$$

esta es una función analitica y propia.
4. Variedades con esquinas.

Un teorema relacionado con los conjuntos subanaliticos que admiten estratificación es presentado por Robert.M. Hard. en [2] y dice textualmente:

$$For\ any\ locally\ finite\ family\ \vartheta\ of\ semianalytic\ (resp., subanalityc)$$
$$subsets\ of\ a\ paracompact\ real\ analytic\ manifold\ M\ there\ is\ a$$
$$semianalytic\ stratification\ of\ M\ compatible\ with\ \vartheta.$$

El anterior teorema es conocido como el Terorema de Estratificación y una consecuencia de este es que las matrices Normales N son una subvariedad estratificada de $\Re^{2n^2}$ que sumado con el hecho de que la matrices normales N tienen forma de estrella caracteriza estas matrices en un ambiente topológico mas claro.

4 Bibliografia.

[0] M.HUTHANEN. A Stratification of the set of normal matrices,SIAM J, Matrix Anal. Appl. Vol 23,N.2,pp 349-367,2001.
[1] A.BAKER. Matrix Groups, An Introduction to Lie Group Theory. Spinger-Verlag. Londres. 2002.
[2] R.M.HARD. Topological properties of subanalytic sets, Trans. AMS,211:57-70, 1975.